ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
И. В. Михайлова,
Л. Н. Баркова

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2007

Утверждено научно-методическим советом математического факультета 28 февраля 2007 г., протокол № 6

Рецензент Шабунина З. А.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского госуниверситета.

Рекомендуется для студентов 4 курса математического факультета очной формы обучения.

Для специальности: 010101 (010100) – Математика и по направлению 010200 (510200) – Математика, прикладная математика

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решений может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Такие операции называются многошаговыми.

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Беллманом. Этот принцип приводит к рекуррентным соотношениям – функциональным уравнениям – относительно оптимального значения целевой функции.

Рассматривается управляемая система, которая под влиянием управления переходит из начального состояния $\overrightarrow{\xi_0}$ в конечное состояние $\overrightarrow{\xi_n}$.

Предположим, что процесс управления системой можно разбить на n шагов. Пусть $\overrightarrow{\xi_1}, \overrightarrow{\xi_2}, \dots, \overrightarrow{\xi_n}$ – состояния системы после первого, второго, … , n-го шага. Схематически это выглядит следующим образом

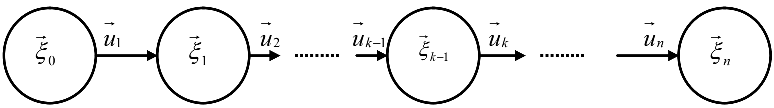

Рис. 1

Состояние $\vec{\xi}_k$ системы после k-го шага $(k = 1, 2, \dots, n)$ характеризуется параметрами $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(s)}$, которые называются фазовыми координатами. То есть, состояние $\vec{\xi}_k$ можно изобразить точкой s-мерного пространства, которое называется *фазовым пространством*. Последовательное преобразование системы достигается с помощью некоторых действий (мероприятий) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, которые составляют управление системой $U = \left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\right)$, где $\vec{u}_k$ – управление на k-ом шаге заключается в выборе значений управляющих переменных $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \dots, u_k^{(s)}$.

Будем предполагать, что состояние системы в конце k-го шага зависит только от предыдущего состояния $\vec{\xi}_{k-1}$ и управления $\vec{u}_k$ на данном шаге. Это свойство называется отсутствием последствия. Обозначим эту зависимость

$$\vec{\xi}_k = F_k\left(\vec{\xi}_{k-1}, \vec{u}_k\right). \qquad (1)$$

Равенство (1) называется *уравнением состояний*.

Функции $F_k\left(\vec{\xi}_{k-1}, \vec{u}_k\right)$ полагаем заданными.

Меняя управление U, получим различную *эффективность* процесса, которую будем оценивать количественно целевой функцией

$$Z = \Phi\left(\vec{\xi}_0, U\right). \qquad (2)$$

Показатель эффективности k-го шага процесса управления, который зависит от состояния $\vec{\xi}_{k-1}$ в начале этого шага и управления $\vec{u}_k$, выбранного на этом шаге, обозначим через $f_k\left(\vec{\xi}_{k-1}, \vec{u}_k\right)$.

В рассматриваемой задаче пошаговой оптимизации функция (2) должна быть аддитивной, т. е.

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k\left(\vec{\xi}_{k-1}, \vec{u}_k\right). \qquad (3)$$

Обычно условиями процесса на управление на каждом шаге $\vec{u}_k$ накладываются некоторые ограничения. Управления, удовлетворяющие этим ограничениям, называются допустимыми.

Задачу пошаговой оптимизации можно сформулировать так: требуется определить совокупность допустимых управлений $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$, переводящих систему из начального состояния $\vec{\xi}_0$ в конечное состояние $\vec{\xi}_n$ и максимизирующих или минимизирующих показатель эффективности (3).

Начальное состояние $\vec{\xi}_0$ и конечное состояние $\vec{\xi}_n$ могут быть заданы однозначно или могут быть указаны множеством Ω_0 начальных состояний и множеством Ω_n конечных состояний так, что $\vec{\xi}_0 \in \Omega_0$; $\vec{\xi}_n \in \Omega_n$.

Управление, при котором достигается максимум целевой функции (3), называется *оптимальным управлением* и обозначается $U^* = \left(\vec{u}_1^{\,*}, \vec{u}_2^{\,*}, \ldots, \vec{u}_n^{\,*}\right)$.

Метод динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится постепенно шаг за шагом. На каждом шаге оптимизируется управление только этого шага. Вместе с тем на каждом шаге управление выбирается с учетом последствий, так как оптимальное управление только на данном шаге может привести к неоптимальному эффекту всего процесса. Управление на каждом шаге должно быть оптимальным с точки зрения процесса в целом.

Основное правило динамического программирования сформулировано Р. Беллманом и называется *принципом оптимальности*.

Оптимальное управление обладает таким свойством, что каково бы ни было начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага.

Использование этого принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, является не локально лучшим, а лучшим с точки зрения процесса в целом.

Так, если в начале k-го шага система находится в состоянии $\vec{\xi}_{k-1}$ и выбирается произвольное управление $\vec{u}_k$, то система придет в новое состояние $\vec{\xi}_k = F_k\left(\vec{\xi}_{k-1}, \vec{u}_k\right)$ и дальнейшие управления $\vec{u}_{k+1}, \ldots, \vec{u}_n$ должны выбираться оптимальными относительно состояния $\vec{\xi}_k$. Это означает, что при этих управлениях максимизируется показатель эффективности на последующих до конца процесса шагов $k+1, \ldots, n$, т. е. величина $\sum\limits_{i=k+1}^{n} f_i\left(\vec{\xi}_{i-1}, \vec{u}_i\right)$. Показатель, характеризующий суммарную эффективность от данного k-го до последнего n-го шага, будем обозначать Z_k, т. е. $Z_k = \sum\limits_{i=k}^{n} f_i\left(\vec{\xi}_{i-1}, \vec{u}_i\right)$. Задача оптимизации процесса, начиная с k-го шага до последнего n-го шага, похожа на исходную при начальном состоянии $\vec{\xi}_{k-1}$, управлении $U_k = \left(\vec{u}_k, \ldots, \vec{u}_n\right)$ и показатель эффективности $Z_k = \Phi\left(\vec{\xi}_{k-1}, U_k\right)$, аналогично (2). Выбирая оптимальное управление U_k^* на оставшихся $n-k+1$ шагах, получим величину $Z_k^* = \max Z_k$, которая зависит только от $\vec{\xi}_{k-1}$, т. е.

$$Z_k^*\left(\vec{\xi}_{k-1}\right) = \max_{U_k} \Phi\left(\vec{\xi}_{k-1}, U_k^*\right). \tag{4}$$

Величина $Z_k^*\left(\vec{\xi}_{k-1}\right)$ называется условным максимумом. Если теперь на k-ом шаге выбрать произвольное управление $\vec{u}_k$, то система перейдет в состояние $\vec{\xi}_k$. И, согласно принципу оптимальности, какое бы $\vec{u}_k$ мы ни выбрали, на последующих шагах управление $\left(\vec{u}_k, \ldots, \vec{u}_n\right)$ должно выбираться так, чтобы показатель эффективности Z_{k+1} достигал максимального значения, равного $Z_{k+1}^*\left(\vec{\xi}_k\right)$. Управление $\vec{u}_k$ необходимо выбирать так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на последующих шагах (начиная с $(k+1)$-го) приводило бы к общему максимуму показателя эффективности на $n-k+1$ шагах, начиная с k-го до конца. Это положение в аналитической форме можно записать в виде следующего соотношения:

$$Z_k^*\left(\vec{\xi}_{k-1}\right)=\max_{\vec{u}_k}\left(f_k\left(\vec{\xi}_{k-1},\vec{u}_k\right)+Z_{k+1}^*\left(\vec{\xi}_k\right)\right). \qquad (5)$$

Это соотношение называется основным функциональным уравнением динамического программирования, или уравнением Беллмана.

Из уравнения (5) может быть получена функция $Z_{n-1}^*\left(\vec{\xi}_{n-2}\right)$, если известна функция $Z_n^*\left(\vec{\xi}_{n-1}\right)$; аналогично можно получить функцию $Z_{n-2}^*\left(\vec{\xi}_{n-3}\right)$, если найдено $Z_{n-1}^*\left(\vec{\xi}_{n-2}\right)$ и так далее, пока не будет определена величина $Z_1^*\left(\vec{\xi}_0\right)$, представляющая по определению максимальное значение показателя эффективности процесса в целом

$$Z_1^*\left(\vec{\xi}_0\right)=\max_U \Phi\left(\vec{\xi}_0,U\right).$$

Соотношение (5) для определения последовательности функций $Z_k^*\left(\vec{\xi}_{k-1}\right)$ через $Z_{k+1}^*\left(\vec{\xi}_k\right)$ $\left(k=n,n-1,...,1\right)$ называются рекуррентными уравнениями Беллмана.

Пример построения модели динамического программирования

Планируется распределение начальной суммы средств ξ_0 между *n* предприятиями $\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_n$. Предполагается, что выделенные предприятию Π_k в начале планового периода средства x_k приносят доход $f_k\left(x_k\right)$ $\left(k=1,2,...,n\right)$. Будем считать, что:

1) доход, полученный от вложения средств в предприятие Π_k, не зависит от вложения средств в другие предприятия;

2) доход, полученный от разных предприятий, выражается в одинаковых единицах;

3) общий доход равен сумме доходов, полученных от распределения всех средств по всем предприятиям.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход был максимальным.

Запишем математическую модель задачи.

Общий доход выражается целевой функцией

$$Z=\sum_{k=1}^{n} f_k\left(x_k\right). \qquad (6)$$

Переменные x_k должны удовлетворять условиям

$$x_1+x_2+...+x_n=\xi_0\ ; \quad x_k\geq 0 \ \left(k=1,...,n\right). \qquad (7)$$

Требуется определить переменные $x_1,...,x_n$, которые удовлетворяют ограничениям (7) и обращают в максимум целевую функцию (6).

Данный процесс будем рассматривать как n-шаговый процесс. За номер k-го шага примем номер предприятия, которому выделяются средства x_k. На первом шаге выделяем первому предприятию средства x_1, на втором шаге – второму предприятию выделяем средства x_2 из оставшихся и т. д. Очевидно, что переменные x_k $(k = 1,...,n)$ можно рассматривать как управляющие переменные. Начальное состояние системы характеризуется величиной ξ_0 средств, подлежащих распределению. После выделения x_1 остается $\xi_1 = \xi_0 - x_1$ средств и т. д. Величины $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n$, характеризующие остаток средств после распределения на предшествующих шагах, будем рассматривать как параметры состояния. Уравнениями состояния служат равенства

$$\xi_k = \xi_{k-1} - x_k \quad (k = 1,...,n) \ .$$

Суммарный доход за n шагов составляет

$$Z = \Phi(\xi_0, U) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

и представляет собой показатель эффективности процесса, имеющий, как видно из этого равенства, аддитивную форму.

Если к началу k-го шага остаток средств равен ξ_{k-1}, то доход, который можно получить на оставшихся $n-k+1$ шагах (т. е. от выделения средств предприятиям $\Pi_k, \Pi_{k+1}, ..., \Pi_n$), составит $Z_k = \sum_{i=k}^{n} f_i(x_i)$.

Максимальный доход за эти $n-k+1$ зависит от того, сколько средств осталось от предыдущих $k-1$ шагов, т. е. величины ξ_{k-1}. Поэтому будем его обозначать через $Z_k^*(\xi_{k-1})$. Очевидно, что $Z_1^*(\xi_0) = Z_{\max}$, т. е. $Z_1^*(\xi_0)$ представляет собой суммарный максимальный доход за n шагов (доход, полученный при оптимальном распределении средств ξ_0 между n предприятиями).

Рассмотрим любой k-ый шаг. Очевидно, что x_k можно выбирать из условия $0 \le x_k \le \xi_{k-1}$. Значение x_k, удовлетворяющее этому двойному неравенству, называется *допустимым*. Принцип оптимальности в этом конкретном случае означает, что, выделив величину x_k и получив от k-го предприятия доход $f_k(x_k)$, мы должны распорядиться оставшимися средствами $\xi_k = \xi_{k-1} - x_k$ наивыгоднейшим образом и получить от предприятий $\Pi_{k+1}, ..., \Pi_n$ максимальный доход $Z_{k+1}^*(\xi_k)$. Ясно, что величину x_k следует определять из условия максимизации суммы $f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(\xi_k)$. Таким образом, получаем уравнение

$$Z_k^*(\xi_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le \xi_{k+1}} \left\{ f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(\xi_k) \right\}, \qquad (8)$$

называемое уравнением Беллмана.

Перейдем к схеме вычислений. Нас интересует $Z_1^*(\xi_0)$, но если начать с первого шага, т. е. с решения задачи

$$Z_1^*(\xi_0) = \max_{0 \le x_i \le \xi_0} \left\{ f_1(x_1) + Z_2^*(\xi_1) \right\},$$

то необходимо знать $Z_2^*(\xi_1)$. В свою очередь, при определении $Z_2^*(\xi_1)$ нужно знать $Z_3^*(\xi_2)$ и т. д. Однако имеется шаг, за которым нет последующих. Таким является n-й шаг, на котором выделяются средства последнему предприятию Π_n. Для него равенство (8) имеет вид

$$Z_{n-1}^*(\xi_{n-1}) = \max_{0 \le x_n \le \xi_{n-1}} \left\{ f_n(x_n) \right\}. \qquad (9)$$

Будем считать, что функция дохода $f_n(x_n)$ монотонно возрастает, поэтому решением этой задачи является условное оптимальное управление $x_n^*(\xi_{n-1})$, при котором достигается условный максимум $Z_n^*(\xi_{n-1}) = f_n(x_n^*)$. Следовательно, предприятию Π_n выделяются все оставшиеся средства ξ_{n-1}, которые приносят доход $f_n(\xi_{n-1})$. Вернемся к предыдущему, $(n-1)$-му шагу, в начале которого имеется остаток средств ξ_{n-2}. Уравнение (8) в этом случае примет вид

$$Z_{n-1}^*(\xi_{n-2}) = \max_{0 \le x_{n-2} \le \xi_{n-2}} \left\{ f_{n-1}(x_{n-1}) + Z_n^*(\xi_{n-1}) \right\}.$$

Здесь оптимальный выбор x_{n-1} не столь очевиден, как при решении предыдущей задачи (9). Прежде всего, выразив из уравнения состояния ξ_{n-1} через $\xi_{n-2} - x_{n-1}$, получим

$$Z_{n-1}^*(\xi_{n-2}) = \max_{0 \le x_{n-1} \le \xi_{n-2}} \left\{ f_{n-1}(x_{n-1}) + Z_n^*(\xi_{n-2} - x_{n-1}) \right\}. \qquad (10)$$

Оба слагаемых в фигурных скобках – известные функции, зависящие от управляющей переменной x_{n-1}. Параметр ξ_{n-2} является начальным состоянием для данной задачи. Выполнив исследование на максимум функции $Z_{n-1}(x_{n-1}, \xi_{n-2}) = f_{n-1}(x_{n-1}) + Z_n^*(\xi_{n-2} - x_{n-1})$ от одной переменной x_{n-1}, получим условное оптимальное управление $x_{n-1}^*(\xi_{n-2})$ и соответствующий условный максимум суммарного дохода $Z_{n-1}^*(\xi_{n-2})$. На языке данной задачи это решение означает, что если перед выделением средств предприятию Π_{n-1} в нашем распоряжении имеется остаток ξ_{n-2}, то предприятию Π_{n-1} необходимо выделить $x_{n-1}^*(\xi_{n-2})$ средств. При этом сумма доходов от предприятий Π_{n-1} и Π_n достигает максимума.

Закончив решение задачи (10), перейдем к следующему с конца $(n-2)$-му шагу, определим аналогичным образом условное оптимальное управление $x_{n-2}^{*}\left(\xi_{n-3}\right)$ и соответствующий остатку ξ_{n-3} условный максимум $Z_{n-2}^{*}\left(\xi_{n-3}\right)$ и т. д.

В результате, проходя последовательно все шаги с конца процесса распределения к его началу (т. е. к первому шагу), получим две последовательности функций:

$$Z_{n}^{*}\left(\xi_{n-1}\right),\ Z_{n-1}^{*}\left(\xi_{n-2}\right),\ldots,Z_{2}^{*}\left(\xi_{1}\right),Z_{1}^{*}\left(\xi_{0}\right)$$

(условные максимальные доходы) и

$$x_{n}^{*}\left(\xi_{n-1}\right),\ x_{n-1}^{*}\left(\xi_{n-2}\right),\ldots,x_{2}^{*}\left(\xi_{1}\right),x_{1}^{*}\left(\xi_{0}\right)$$

(условные оптимальные управления).

Этим завершается первый и основной этап вычислительного процесса, получивший название условной оптимизации.

Теперь приступаем ко второму этапу вычислительной схемы – безусловной оптимизации. На этом этапе, прежде всего, зная функцию $Z_{1}^{*}\left(\xi_{0}\right)$, по заданному значению $\xi_{0^{*}}$ определяем * (* Звездочки, помещенные над параметрами состояния, указывают на определенные значения этих параметров, вычисленные на этапе безусловной оптимизации) $Z_{\max}=Z_{i^{*}}\left(\xi_{0^{*}}\right)$. Далее, обращаемся к последовательности $x_{k^{*}}\left(\xi_{k-1}\right)$, которую проходим от начала к концу процесса. Выделяем $x_{1^{*}}=x_{1^{*}}\left(\xi_{0^{*}}\right)$ первому предприятию; тогда для распределения остается $\xi_{1^{*}}=\xi_{0^{*}}-x_{1^{*}}$. По этой величине определяем оптимальное количество средств $x_{2^{*}}=x_{2^{*}}\left(\xi_{1^{*}}\right)$, выделяемых второму предприятию. Снова находим $\xi_{2^{*}}=\xi_{1^{*}}-x_{2^{*}}$, после чего определяем $x_{3^{*}}$, и т. д., пока не будет определено искомое оптимальное управление $\left(x_{1}^{*},x_{2}^{*},\ldots,x_{n}^{*}\right)$.

Числовой пример

1. Требуется найти оптимальный способ распределения имеющихся средств.

Будем рассматривать процесс распределения средств как n-шаговый, в котором номер шага соответствует номеру года. Управляемая система – два предприятия с вложенными в них средствами. Система характеризуется одним параметром состояния ξ_{k-1} $\left(k=1,\ldots,n\right)$ – количеством средств, которые следует перераспределить в начале k-го года. Переменных управления на каждом шаге две: x_{k_1} и x_{k_2} – количество средств, выделенных соответственно предприятию I и предприятию II. Так как средства ежегодно перераспределяются полностью, то $x_{k_2}=\xi_{k-1}-x_{k_1}$

$(k=1,\ldots,n)$. Для каждого шага задача становится одномерной. Обозначим x_{k_1} через x_k, тогда $x_{k_2}=\xi_{k-1}-x_k$.

Показатель эффективности k-го шага равен $f_1(x_k)+f_2(\xi_{k-1}-x_k)$. Это доход, полученный от двух предприятий в течение k-го года.

Показатель эффективности задачи – доход, полученный от двух предприятий в течение n лет, составляет

$$Z=\sum_{k=1}^{n}\left[f_1(x_k)+f_2(\xi_{k-1}-x_k)\right]. \tag{11}$$

Уравнение состояния выражает остаток средств ξ_k после k-го шага и имеет вид

$$\xi_k=\varphi_1(x_k)+\varphi_2(\xi_{k-1}-x_k). \tag{12}$$

Пусть $Z_k^*(\xi_{k-1})$ – условный оптимальный доход, полученный от распределения средств ξ_{k-1} между двумя предприятиями за $n-k+1$ лет, начиная с k-го года до конца рассматриваемого периода. Запишем рекуррентные соотношения для этих функций:

$$\begin{aligned} Z_n^*(\xi_{n-1}) &= \max_{0\le x_n\le\xi_{n-1}}\left\{f_1(x_n)+f_2(\xi_{n-1}-x_n)\right\};\\ Z_k^*(\xi_{k-1}) &= \max_{0\le x_k\le\xi_{k-1}}\left\{f_1(x_k)+f_2(\xi_{k-1}-x_k)+Z_{k+1}^*(\xi_k)\right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

где ξ_k – определяется из уравнения состояния (12).

Рассмотрим решение задачи при конкретных значениях параметров.

Пусть $\xi_0=10000$; $n=4$; $f_1(x)=0,4x$; $f_2(x)=0,3x$; $\varphi_1(x)=0,5x$; $\varphi_2(x)=0,8x$.

Если x_k и $\xi_{k-1}-x_k$ – средства, выделенные соответственно предприятиям I и II в k-ом году, то суммарный доход, полученный в этом году от обоих предприятий, равен

$$Z_k=0,4x_k+0,3\xi_{k-1}-0,3x_k=0,1x_k+0,3\xi_{k-1},$$

а уравнение состояния (12) принимает вид

$$\xi_k=0,5x_k+0,8(\xi_{k-1}-x_k)=0.8\xi_{k-1}-0,3x_k\ .$$

Основные функциональные уравнения (13) запишутся следующим образом

$$Z_4^*(\xi_3)=\max_{0\le x_4\le\xi_3}\left\{0,1x_4+0,3\xi_3\right\};$$

$$Z_k^*(\xi_{k-1})=\max_{0\le x_k\le\xi_{k-1}}\left\{0,1x_k+0,3\xi_{k-1}+Z_{k+1}^*(0,8\xi_{k-1}-0,3x_k)\right\}\ (k=1,2,\ 3).$$

Проведем этап условной оптимизации.

Четвертый шаг: Условный оптимальный доход равен

$$Z_4^*(\xi_3)=\max_{0\le x_4\le\xi_3}\left\{0,1x_4+0,3\xi_3\right\}=0,4\xi_3\ ,$$

так как линейная относительно x_4 функция достигает максимума в конце интервала, т. е. при $x_4^*(\xi_3) = \xi_3$.

Третий шаг:

$$Z_3^*(\xi_2) = \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \{0{,}1x_3 + 0{,}3\xi_2 + 0{,}4(0{,}8\xi_2 - 0{,}3x_3)\} =$$

$$= \max_{0 \le x_3 \le \xi_2} \{-0{,}02x_3 + 0{,}63\xi_2\}.$$

Коэффициент при x_3 отрицателен, поэтому максимум этой линейной относительно x_3 функции достигается в начале интервала, т. е. $x_3^*(\xi_2) = 0$; $Z_3^*(\xi_2) = 0{,}62\xi_2$.

Второй шаг:

$$Z_2^*(\xi_1) = \max_{0 \le x_2 \le s_1} \{-0{,}086x_2 + 0.796\xi_1\},$$

откуда $x_2^*(\xi_1) = 0$; $Z_2^*(\xi_1) = 0{,}796\xi_1$.

Первый шаг:

$$Z_1^*(\xi_0) = \max\{-0{,}1388x_1 + 0{,}9368\xi_0\} = 0{,}9368\xi_0$$

при $x_1^*(\xi_0) - 0$.

Результат условной оптимизации:

$$Z_1^*(\xi_0) = 0{,}9368\xi_0\ ;\ x_1^*(\xi_0) = 0\ ;\ Z_2^*(\xi_1) = 0{,}796\xi_1\ ;\ x_2^*(\xi_1) = 0\ ;$$

$$Z_3^*(\xi_2) = 0{,}62\xi_2\ ;\ x_3^*(\xi_2) = 0\ ;\ Z_4^*(\xi_3) = 0{,}4\xi_3\ ;\ x_4^*(\xi_3) = 0\ .$$

Перейдем к безусловной оптимизации. Полагаем $\xi_0^* = 10000$, тогда $Z_{\max} = 9368$, $x_1^* = 0$. Зная x_1^*, находим $\xi_1^* = 0{,}8 \cdot 10000 - 0{,}3 \cdot 0 = 8000$; используя ξ_{1^*}, получаем $x_{2^*} = 0$ и $\xi_{2^*} = 0{,}8 \cdot 80000 = 6400$. Аналогично $x_{3^*} = 0$; $\xi_{3^*} = 5120$. Наконец, $x_4^* = 5120$. Следовательно, средства по годам нужно распределить так:

Предприятие	Год			
	1	2	3	4
I	0	0	0	5120
II	10 000	8000	6400	0

При таком распределении средств (10 000 руб.) за четыре года будет получен доход, равный $Z_{\max} = 9368$.

Непрерывные модели, примером которых служит эта задача, не являются типичными в практике распределения ресурсов. В дальнейшем большинство задач будет носить дискретный характер.

2. Студент К. заканчивает институт. Чтобы получить диплом, он хочет добиться наилучших оценок на выпускных экзаменах. Он делит имеющиеся у него в конце недели учебное время на 10 отрезков равной длины. Ему надо сдать экзамены по четырем предметам, два из которых он считает легкими, два трудными. По оценке студента, он не получит ни одного выпускного балла, если совсем не будет заниматься легкими предметами, два балла, если отведет на такой предмет один или два отрезка, три балла, если посвятит им три отрезка, и четыре балла, если будет заниматься легким предметом четыре отрезка. Аналогичные оценки для трудных предметов равны нулю, одному, двум и трем баллам. Кроме того, при изучении трудного предмета в течение пяти отрезков он считает, что получит четыре балла. Не вдаваясь в вопрос о том, являются ли эти оценки излишне оптимистическими, как бы вы посоветовали студенту распределить его время, чтобы максимизировать число баллов, которое он может набрать на экзаменах? Постройте соответствующую модель динамического программирования и найдите ее оптимальное решение. Какова оценка в баллах одного дополнительного отрезка времени для подготовки? Каковы потери в баллах при условии, что студент не будет готовиться к экзаменам в течение одного отрезка?

Решение:

1) Под этапом будем понимать подготовку по определенному предмету. Отсюда $N=4$. Пусть студент сначала занимается легкими предметами, а затем трудными:

Л	Л	Т	Т
4	3	2	1

2) ξ_{n+1} – количество оставшихся дней перед началом занятия n-ым предметом $(n=4,3,2,1)$, $\xi_4=10$.

3) u_n – количество дней на n-ый предмет.

4) $\xi_n=\xi_{n+1}-u_n$ – уравнение процесса.

5) $u_n \ge 0$, $\sum u_n \le 10$.

6) $Z_n\left(\xi_{n+1},u_n\right)$ – количество баллов, полученных при сдаче предмета n $\left(n=4,3,2,1\right)$ при условии, что на подготовку этого предмета затрачено u_n дней из ξ_{n+1}

$$W\left(10,u_4,u_3,u_2,u_1\right)=\sum_{n=1}^{4}W_n\left(\xi_{n+1},u_n\right).$$

7) $Z_n(x)$ – максимальное количество баллов за n предметов, если для сдачи этих предметов было отведено x дней.

$$Z_n(x)=\max_{0\le u_n\le x}\left\{Z_n\left(u_n\right)+W_{n-1}\left(x-u_n\right)\right\},$$

$n=1,2,3,4$; $Z_0(x)=0$.

8) Решение функционального уравнения проиллюстрировано в таблице. Из таблицы ясно, что $Z_4(10)=10$ и существует несколько оптимальных стратегий. Вот две из них:

1) $u_4=0$, $u_3=5$, $u_2=1$, $u_1=4$;

2) $u_4=1$, $u_3=1$, $u_2=4$, $u_1=4$.

Таблица решения функционального уравнения

x	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$	
	$u_1(x)$	$Z_1(u_1)$	$u_2(x)$	$Z_2(u_2)+$ $+Z_1(x-u_2)$	$u_3(x)$	$Z_3(u_3)+$ $+Z_2(x-u_3)$	$u_4(x)$	$Z_4(u_4)+$ $+Z_3(x-u_4)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,1	0,2	0,1	2,2	0,1	2,1	0,1	2,1
2	0,1,2	0,2,2	0,1,2	2,4,2	0,1,2	4,3,1	0,1,2	4,3,1
3	0,1,2,3	0,2,2,3	0,1,2,3	3,4,4,3	0,1,2,3	4,5,3,2	0,1,2,3	5,5,3,2
4	0,1,2,3,4	0,2,2,3,4	0,1,2,3,4	4,5,4,5,4	0,1,2,3,4	5,5,5,4,3	0,1,2,3,4	5,6,5,4,3
5			1,2,3,4	6,5,5,6	0,1,2,3,4,5	6,6,5,6,5,4	0,1,2,3,4,5	6,6,6,6,5,4
6			2,3,4	6,6,6	0,1,2,3,4,5	6,7,6,6,7,6	0,1,2,3,4,5	7,7,6,7,7,6
7			3,4	7,7	0,1,2,3,4,5	7,7,7,7,7,8	0,1,2,3,4,5	8,8,7,7,8,8
8			4	8	0,1,2,3,4,5	8,8,7,8,8,8	0,1,2,3,4,5	8,9,8,8,8,9
9					1,2,3,4,5	9,8,8,9,9	0,1,2,3,4,5	9,9,9,9,9,9
10					2,3,4,5	9,9,9,10	0,1,2,3,4,5	10,10,9,10, 10,10

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти оптимальное распределение девяти механизмов между тремя видами земляных работ, если суммарная производительность (в тыс. $м^3$) задана в таблице:

Число механизмов / Виды работ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	5	9	12	14	15	18	20	24	27
II	7	9	11	13	16	19	21	22	25
III	6	10	13	15	16	18	21	22	25

2. Решить ту же задачу при наличии двенадцати механизмов и дополнительных данных о производительности:

Число механизмов	10	11	12

Виды работ			
I	30	34	38
II	28	35	40
III	26	29	33

3. Распределить имеющиеся ресурсы в размере 250 тыс. руб. между четырьмя предприятиями, если увеличение выпуска в зависимости от предоставленных средств x характеризуется таблицей.

Предприятия / Вложенные средства	I	II	III	IV
50	17	25	20	30
100	38	40	35	45
150	50	48	52	50
200	55	56	60	55
250	60	62	68	68

4. Решить предыдущую задачу при условии, что исходные ресурсы в размере 200 тыс. руб. распределяются между пятью предприятиями, в каждое из которых нельзя вкладывать более 140 тыс. руб., и прибыль, приносимая каждым предприятием, задана таблицей.

Предприятия / Вложенные средства	I	II	III	IV	V
10	10	18	20	5	30
20	20	25	40	10	68
30	40	30	60	15	95
40	100	31	80	25	140
50	160	32	95	37	160
60	180	33	101	69	170
70	190	34	102	140	175
80	200	35	103	225	176
90	210	36	104	280	177
100	215	37	105	300	178
110	220	38	106	302	179
120	225	39	107	303	180
130	230	40	108	304	181
140	235	41	109	305	182

5. Исходная сумма в 300 тыс. руб. должна быть распределена тремя предприятиями при следующих условиях: средства, выделяемые каждому предприятию x_k $(k = 1, 2, 3)$, не могут превышать величины d_k тыс. руб., которую предприятие может освоить, и позволяют получить продукции на сумму $f_k(x_k)$ тыс. руб. Значения d_k и $f_k(x_k)$ даны в таблице

k	I	II	III
d_k	100	75	150
$f_k(x_k)$	$0{,}4x_1^2$	$100x_2$	$120x_3$

Найти оптимальный план распределения средств.

6. Составить оптимальный план финансирования одного предприятия на трехлетний период исходя из начальной суммы $\xi_0 = 300$ тыс. руб., получаемой прибыли $f(x)$, возврата к концу года средств $\varphi(x)$ при условии, что ежегодно (кроме последнего года) вкладывается в производство часть имеющихся средств.

Максимизировать суммарную прибыль при следующих условиях:

а) $f(x) = 10 - 0{,}001(x-100)^2$; $\varphi(x) = 0{,}6x$;

б) решить задачу п. а) при $\varphi(x) = 0$;

в) в задаче п. б) принять, что в первые два года прибыль задается функцией $f_1(x) = 24 - 0{,}0004(x-200)^2$;

г) в п. а) принять, что функции прибыли заданы таблицей

k	x / $f_k(x)$	50	100	150	200	250	300
1	$f_1(x)$	7	10	15	20	18	16
2	$f_2(x)$	8	12	16	21	20	20
3	$f_3(x)$	6	12	15	18	20	24

7. Распределить имеющиеся средства $\xi_0 = 50$ тыс. руб. между тремя предприятиями при заданных функциях прибыли $f_1(x) = 0{,}12x$; $f_2(x) = 0{,}0012x^2$; $f_3(x) = -0{,}0024x^2 + 0{,}36x$ из условия максимизации суммарной прибыли.

8. Для обеспечения производства трех видов продукции имеются ресурсы двух видов сырья в количестве 10 и 12 ед. В таблицах приведены данные о расходе каждого из видов сырья на изготовление единицы продукции и прибыль в зависимости от объема производства:

Затраты на 1 шт.

Предприятия / Сырье	1	2	3
I	2	4	1
II	4	2	3

Прибыль

Объем произ-ва / Предприятия	1	2	3	4	5	6
1	8	15	21	26	30	32
2	7	14	20	26	31	34
3	10	18	24	26	28	30

9. Благотворительное общество «Объединенный фонд» должно выделить 10 своих членов для сбора пожертвований на трех фирмах, конторы которых расположены в трех крупных административных зданиях. По оценке директора, выделив y_j человек на здание j, можно добиться получения обязательств на взносы в фонд общества общей суммой $R_j\left(y_j\right)$ сотен долл., где $R_j(0)=0$ и

$R_1(1)=5$	$R_1(2)=10$	$R_1(3)=15$	$R_1(4)=25$	$R_1(5)=35$	$R_1(6)=50$
$R_2(1)=3$	$R_2(2)=6$	$R_2(3)=12$	$R_2(4)=18$	$R_2(5)=30$	$R_2(6)=55$
$R_3(1)=20$	$R_3(2)=35$	$R_3(3)=45$	$R_3(4)=55$	$R_3(5)=60$	$R_3(6)=65$

(никаких дополнительных пожертвований не удается получить, если направить в здание 3 – более шести человек). Сколько членов общества нужно направить в каждое здание? Постройте соответствующую модель динамического программирования и найдите ее оптимальное решение. Покажите, как изменится решение, если всего для сбора взносов направляется 9, 11 или 12 членов общества.

10. Имеется одно предприятие и начальный запас средств ξ, которые можно вкладывать в предприятие не целиком, а частично резервировать. Средства x, вложенные на k-ом шаге, дают прибыль $f_k(x)$ и уменьшаются до $\varphi_k(x)$. Требуется наилучшим образом распределить имеющиеся и оставшиеся средства на n лет, чтобы суммарная прибыль была максимальной. Наметить схему решения задачи методом динамического программирования, написать все нужные формулы, описать расчетную процедуру в следующих случаях:

а) вложенные средства расходуются неполностью;

б) вложенные средства расходуются целиком, $\varphi_k(x)=0$;

в) все функции прибыли одинаковы: $f_k(x) = f(x)$, а все вложенные средства расходуются целиком: $\varphi_k(x) = 0$.

11. Решить задачу 10 при следующих условиях:

а) $\xi_0 = 300$; $n = 4$; $f_1(x) = 0,6x$; $\varphi_1(x) = 0,4$;
$f_2(x) = 0,3x$; $\varphi_2(x) = 0,7x$;

б) $\xi_0 = 300$; $n = 3$; $f_1(x) = 0,001x^2$; $\varphi_1(x) = 0,7x$;
$f_2(x) = 0,2x$; $\varphi_2(x) = 0,3x$;

в) принять все исходные данные п. б) за исключением функций $f_1(x)$ и , которые заданы в следующей таблице:

x / Прибыль	50	100	150	200	250	300
$f_1(x)$	6	10	16	24	28	30
$f_2(x)$	5	12	20	25	27	30

г) принять исходные данные п. а) с дополнительным условием, что в качестве капиталовложения используется также полученная прибыль;

д) в задаче п. а) принять дополнительное условие, что финансирование ведется только за счет прибыли и вложенные средства не возвращаются;

е) в задаче п. а) принять, что прибыль полностью вкладывается в производство, но максимизируется только прибыль, получаемая после четвертого года;

ж) в задаче п. а) принять, что ежегодно вкладывается половина прибыли и максимизируется общая сумма остающейся после каждого года прибыли;

з) решить задачу, аналогичную а), при условии, что начальные средства равны 1, , а функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ заданы в следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0,2	0,36	0,40	0,18	0,16
0,4	0,68	0,75	0,35	0,30
0,6	0,92	0,96	0,50	0,45
0,8	0,05	1,05	0,70	0,65
1,0	1,10	1,15	0,90	0,80

12. Решить задачу № 5 для четырех предприятий, если функция d_k и $f_k(x_k)$ заданы таблицей

k \ x	$f_k(x_k)$				d_k
	50	100	150	200	
I	15	20	20	20	100
II	12	24	36	56	150
III	10	20	30	30	150
IV	15	30	30	30	100

13. Рассмотрим несколько задач динамического программирования связанных с управлением запасами при заданном расходе. Пусть планируемый период разделен на n промежутков времени (дни, месяцы, кварталы и т. д.), в которых задан расход d_k $(k=1,2,...,n)$, производимый в конце каждого из промежутков. Известны начальный уровень запасов и зависимость суммарных затрат на хранение и пополнение запасов в данном периоде от среднего уровня хранимых запасов и их пополнения.

Требуется определить размеры пополнения запасов в каждом промежутке времени для удовлетворения заданного расхода из условия минимизации суммарных затрат за весь планируемый период времени.

Составить математическую модель задачи и решить ее при следующих условиях:

а)

$\varphi\left(\overline{\xi}_k\right)=0,4\overline{\xi}_k$, $d_1=6$, $d_2=5$, $d_3=15$, $d_4=20$.

Ежемесячное пополнение запасов не превышает 15 ед.

б) в упр. а) положить $\xi_0=0$, $\xi_4=5$.

в) в упр. а) принять

$$\psi_k\left(x_k\right)=\begin{cases} 4x_k & при\ 0\le x_k\le 5, \\ 3x_k+5 & при\ 5\le x_k\le 15. \end{cases}$$

г) в упр. а) положить $n=3$, $\xi_0=10$, $\xi_3=0$, $d_1=15$, $d_2=5$, $d_3=10$, $\varphi\left(\overline{\xi}_k\right)$ и $\psi\left(x_k\right)$ заданы таблично:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(t)$	0	1	3	5	9	18	20	28	40	42	47	55	65	70	90	100
$\psi(t)$	0	-	-	-	-	20	-	-	-	-	30	-	-	-	-	35

14. Предприятие выпускает телевизоры и кинескопы. Фиксированные затраты на выпуск партии кинескопов равны 2500 руб., затраты на выпуск одного кинескопа составляют 8,5 руб. График выпуска телевизоров требует следующего выпуска количества кинескопов в текущем году по месяцам:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
150	250	200	150	110	60	50	110	130	240	300	80

Временем, необходимым для выпуска кинескопов, можно пренебречь. Решение о выпуске кинескопов принимается один раз в месяц. Найти наилучшее время для выпуска партий кинескопов и размер этих партий, если в настоящий момент их имеется 10, а в конце года желательно иметь 50.

Литература

1. Волков И.К. Исследование операций / И.К. Волков, Е.А. Закоруйко. – М. : Изд-во МГТУ, 2002. – 435 с.

2. Калихман И.Л. Динамическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. – М. : Высш. шк., 1979. – 126 с.

Учебное издание

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:

Михайлова Ирина Витальевна,

Баркова Лариса Николаевна

Редактор Т.Д. Бунина

Подписано в печать 15.05.07. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 1,16.

Тираж 50 экз. Заказ 955.

Издательско-полиграфический центр

Воронежского государственного университета.

394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. 208-298, 598-026 (факс)

http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@typ.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра

Воронежского государственного университета.

394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 204-133.